NOMBRES COMPLEXES
Travail en autonomie

ECUE concerné

Ce travail en autonomie fait parti de l'ECUE OBM « Outils de base mathématiques ».

Vous serez évalué sur ce travail pendant l'examen B1 OBM. La note concernant cette partie ne sera pas négligeable. Nous vous demanderons de détailler un ou plusieurs points du cours et/ou de traiter quelques exercices.

Prérequis :
— Connaitre les cosinus et sinus des angles usuels par cœur.
— Manipuler le cercle trigonométrique afin de trouver le cosinus et/ou le sinus d'un angle construit à partir d'un angle de référence.
— Manipuler la fonction exponentielle.

Présentation

Ce chapitre aborde les nombres complexes. Certains ont déjà étudié ce chapitre au lycée, d'autres non. Vous avez vu, jusqu'à présent, que les équations du second degré à coefficients réels et à discriminant strictement négatif n'ont pas de solution réelle. L'ensemble des nombres complexes est créé comme extension de l'ensemble des nombres réels, contenant en particulier un nombre imaginaire, noté i tel que $i^2 = -1$. i est donc solution de l'équation $x^2 = -1$. Cela permettra ainsi d'avoir des solutions (complexes) à toutes les équations du second degré.

De nombreux domaines utilisent les nombres complexes. En mathématiques, ils sont utilisés dans la résolution des équations différentielles linéaires du second ordre. Vous en aurez aussi besoin en électronique et en physique cette année. Ils apparaitront plus tard en traitement du signal, analyse de Fourier etc...

But et attendus

• **But**

Votre but est de (re)découvrir ce chapitre par vos propres moyens. On vous demande donc de préparer votre cours (comme un professeur) et de savoir l'appliquer. Vous trouvez les éléments à connaitre dans la partie 1 de ce support. Puis, vous avez les exercices types à savoir reproduire.

• **Attendus :**

À la fin de ce travail en autonomie, vous devez être capables de :

- Manipuler les opérations entre nombres complexes (addition, multiplication, quotient).
- Calculer le module d'un nombre complexe
- Identifier un argument d'un nombre complexe
- Identifier la forme exponentielle d'un nombre complexe
- Manipuler les opérations avec la forme exponentielle de nombres complexes.
- Résoudre, factoriser n'importe quelle équation du second degré à coefficients réels

1 Éléments de cours

- **Écriture algébrique**
  - Définition : un nombre complexe s'écrit sous la forme $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et i un nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$.
  - Partie réelle, partie imaginaire.
  - Notation : $\mathbb{C}$.
  - Égalité de deux nombres complexes : ssi même partie réelle et même partie imaginaire.
- **Opérations dans $\mathbb{C}$**
  - Addition, multiplication, inverse, quotient.
- **Conjugué**
  - Définition
  - Opérations sur les conjugués (somme, produit,...)
- **Représentation graphique**
  - Affixe
  - $M(-z)$, $M(\overline{z})$, $z_{\vec{AB}}$
- **Forme trigonométrique**
  - Module d'un nombre complexe
  - Propriétés du module et longueur AB
  - Argument et forme trigonométrique.
  - Égalité entre deux complexes ssi même module et argument.
- **Forme exponentielle**
  - Définition de e^{ix}.
  - Écriture exponentielle : tout nombre complexe peut s'écrire sous la forme $|z|e^{i\theta}$
  - Propriétés : produit, quotient, lien avec les arguments
- **Équation du second degré à coefficients réels**

Ensemble des solutions à l'équation $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

2 Exercices types

Exercice 2.1

Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 4(2 - 5i) - (-3 - 2i)$
2. $z_2 = i(6 - 2i) + (-2 + 4i)(-i - 1)$
3. $z_3 = \dfrac{1}{1 - i}$
4. $z_4 = \dfrac{25 - 15i}{3 - 4i}$
5. $z_5 = \dfrac{3 - 2i}{(1 - i)^2}$
6. $z_6 = z_2 \times \overline{z_3}$

Exercice 2.2

On considère les nombres complexes $z_1 = -2$, $z_2 = -6 - 8i$ et $z_3 = 4 - 3i$.

1. Calculer $|z_1|$, $|z_2|$, $|z_3|$ et $|\overline{z_3}|$.
2. Calculer le module de $z_2 \times z_3$, $\dfrac{z_3}{z_2}$ et z_2^8, en utilisant les propriétés du module.

Exercice 2.3

Écrire sous forme trigonométrique et/ou exponentielle les nombres complexes suivants :

N.B. : à partir de 6., vous devez absolument réutiliser les calculs précédents.

1. $z_1 = -4$ 2. $z_2 = 6i$ 3. $z_3 = 1 - \sqrt{3}i$ 4. $z_4 = -1 - i$ 5. $z_5 = 2\sqrt{3} - 2i$
6. $z_6 = z_3 z_4$ 7. $z_7 = \dfrac{1}{z_5}$ $z_8 = \dfrac{-2-2i}{\sqrt{3}+i}$ 9. $z_9 = (-1 - \sqrt{3}i)^9$

Exercice 2.4

Trouver un argument de :

1. $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ 2. $z_2 = -2e^{i\frac{\pi}{3}}$ 3. $z_3 = e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{5\pi}{6}}$ 4. $z_4 = \dfrac{-e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{-\frac{\pi}{4}}}$ 5. $z_5 = \dfrac{-e^{i\frac{\pi}{3}}}{ie^{-i\frac{\pi}{12}}}$

Exercice 2.5

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $x^2 - 1 = 0$
2. $x^2 + 1 = 0$.
3. $-x^2 + \sqrt{3}x - 1 = 0$
4. $x^2 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2} = 0$
5. $x^2 + x + 1 = 0$
6. $(x - i)(2x^2 + x + 3) = 0$